9 Methode von LAGRANGE

In diesem Kapitel behandeln wir Extrema von Funktionen in mehreren Veränderlichen (speziell den Fall zweier Variablen), unter Beachtung von Nebenbedingungen.

Wir werden hier zwei Lösungsverfahren behandeln:

i) Die Substitutionsmethode

ii) Die Methode von LAGRANGE

9.1 Grundlegende Aufgabe

. Gegeben seien zwei Funktionen

$$f\colon D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

und

$$g\colon D_g \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y)$$

sowie eine Zahl $c \in \mathbb{R}$.

Gesucht ist nun das Maximum (oder Minimum) der Zielfunktion $f(x, y)$ unter Beachtung der Nebenbedingung $g(x, y) = c$.

Wir notieren dies wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{max(min)} \quad & f(x, y) \\ \text{u. d. N.} \quad & g(x, y) = c \end{aligned}$$

9.2 Substitutionsmethode

Satz 9.1. *Gegeben sei die Aufgabe*

$$\begin{aligned} \textit{max(min)} \quad & f(x, y) \\ \textit{u. d. N.} \quad & g(x, y) = c \end{aligned}$$

(wie in der grundlegenden Aufgabe).

In der Substitutionsmethode löst man nun die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ nach einer der Variablen x oder y auf und setzt die erhaltene Lösung in die Zielfunktion $f(x, y)$ ein.

Diese „Ersetzung“ einer Variablen bezeichnet man als Substitution.

. Die so neu entstandene Funktion $\tilde{f}$ ist eine Funktion in einer Veränderlichen.

Ihre Extremstellen können mit den Methoden der Differentialrechnung (vgl. 6) gefunden werden.

Setzt man die gefundenen Extremstellen von $\tilde{f}$ wieder in die Nebenbedingung ein, so erhält man die Lösung der Aufgabe.

. Betrachten wir dies nun an einer konkreten Aufgabe:

9.3 konkrete Aufgabe

Oberfläche eines Quaders unter Nebenbedingungen

Bestimmen Sie die Abmessungen eines nach oben offenen

Quaders mit quadratischer Grundseite und einem Volumen

von 2 Liter (= 2000[cm^3]) mit minimaler Oberfläche.

Hieraus entnehmen wir die Formeln für die Zielfunktion und die Nebenbedingung:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & F(a,h) = a^2 + 4ah \\ \text{u. d. N.} & V(a,h) = a^2h = 2000 \end{array}$$

wobei $a > 0$ die Kantenlänge und $h > 0$ die Höhe des Quaders bedeuten.

9.4 Lösung mittels Substitutionsmethode

Lösung mittels Substitutionsmethode

Wir lösen die Nebenbedingung nach h auf und erhalten:

$$\begin{aligned} V(a,h) = a^2h &= 2000 \quad | : a^2 \qquad \Leftrightarrow \\ h &= \frac{2000}{a^2} \end{aligned}$$

Setzen wir dieses in die Zielfunktion ein, so erhalten wir:

$$\min F(a,h) \quad = a^2 + 4ah \qquad \Leftrightarrow$$

$$\min \widetilde{F}(a) \quad = a^2 + 4a \cdot \frac{2000}{a^2} \;= a^2 + \frac{8000}{a} \;= a^2 + 8000 \cdot a^{-1}$$

Diese Funktion werden wir nun diskutieren.

Differenzieren wir diese Funktion, so erhalten wir:

$$\widetilde{F}(a) = a^2 + 8000 \cdot a^{-1} = a^2 + \frac{8000}{a}$$

$$\widetilde{F}'(a) = 2a - 8000 \cdot a^{-2} = 2a - \frac{8000}{a^2}$$

$$\widetilde{F}''(a) = 2 + 16000 \cdot a^{-3} = 2 + \frac{16000}{a^3}$$

Setzen wir nun die erste Ableitung gleich Null, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}'(a) = 2a - \frac{8000}{a^2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2\mathrm{a} &= \frac{8000}{a^2} && \Leftrightarrow \\ 2a^3 &= 8000 && \Leftrightarrow \\ a^3 &= 4000 && \Leftrightarrow \\ \mathrm{a} &= \sqrt[3]{4000} && \approx 15{,}87 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Wertes in die zweite Ableitung liefert: $\widetilde{F}''(\sqrt[3]{4000}) = 2 + \frac{16000}{(\sqrt[3]{4000})^3}$

$= 2 + \frac{16000}{4000} \;= 2 + 4 \;= 6 \; > 0$

Es liegt also ein Minimum vor.

Setzen wir nun diesen Wert für a in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{2000}{a^2} = \frac{2000}{(\sqrt[3]{4000})^2} = \frac{2000 \cdot \sqrt[3]{4000}}{(\sqrt[3]{4000})^3} = \frac{2000 \cdot \sqrt[3]{4000}}{4000} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{4000} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3} \cdot \sqrt[3]{4000} = \frac{\sqrt[3]{4000}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{4000}{8}} \\
&= \sqrt[3]{500} \approx 7{,}94 \text{ [cm]}
\end{aligned}
$$

Für die Abmessung $(a, h) = (\sqrt[3]{4000}, \sqrt[3]{500})$ hat der Quader die minimale Oberfläche. Sie beträgt ungefähr $F(a, h) = 755, 95\ [cm^2]$.

9.5 Analyse der Substitutionsmethode

. Betrachten wir die eben gestellte Aufgabe, so haben wir

i) die Komplexität des Problems durch das Substituieren einer Variable reduziert

ii) die kritischen Stellen gefunden [im obigen Beispiel: eine Stelle]

iii) nachgewiesen, dass diese Stellen maximal bzw. minimal sind.

Die Aufgabe ist damit vollständig gelöst.

. Wir wollen nun ein zweites Lösungsverfahren kennenlernen.

9.6 Methode von LAGRANGE

Satz 9.2. *Gegeben sei die Aufgabe*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{max(min)} & f(x, y) \\
\textit{u. d. N.} & g(x, y) = c
\end{array}
$$

(wie in der grundlegenden Aufgabe).

Zunächst wird die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ *umgeformt zu*

$$c - g(x, y) = 0$$

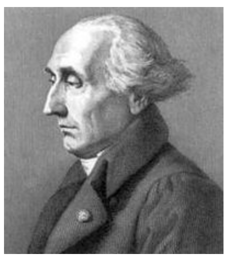
Nun bildet man die LAGRANGE-Funktion $\mathscr{L}(x, y, \lambda)$, in dem zur Zielfunktion $f(x, y)$ das λ-fache der umgeformten Nebenbedingung addiert wird:

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot (c - g(x, y))$$

. Von dieser Funktion $\mathscr{L}(x, y, \lambda)$ bildet man nun den Gradienten,

also sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung und setzt diese gleich Null.

Dieses Gleichungssystem stellt bekanntlich die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums dar (vgl. 8.5).



Wissenschaftler 11:
Joseph-Louis LAGRANGE, italienischer Mathematiker und Astronom
Geburtsname: Giuseppe Lodovico LAGRANGIA
(25.01.1736 Turin - 10.04.1813 Paris)

9.7 konkrete Aufgabe

Oberfläche eines Quaders unter Nebenbedingungen

Bestimmen Sie die Abmessungen eines nach oben offenen

Quaders mit quadratischer Grundseite und einem Volumen

von 2 Liter (= $2000cm^3$) mit minimaler Oberfläche.

Hieraus entnehmen wir die Formeln für die Zielfunktion und die Nebenbedingung:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & F(a, h) = a^2 + 4ah \\ \text{u. d. N.} & V(a, h) = a^2 h = 2000 \end{array}$$

wobei $a > 0$ die Kantenlänge und $h > 0$ die Höhe des Quaders bedeuten.

9.8 Lösung mittels der Methode von LAGRANGE

Lösung mittels der Methode von LAGRANGE

Wir formen die Nebenbedingung um und erhalten:

$$2000 - a^2h = 0$$

Damit bilden wir die LAGRANGE-Funktion:

$$\mathscr{L}(a, h, \lambda) = a^2 + 4ah + \lambda \cdot (2000 - a^2h)$$

Diese Funktion werden wir nun partiell differenzieren:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_a'(a, h, \lambda) &= 2a + 4h - 2ah\lambda \\
\mathscr{L}_h'(a, h, \lambda) &= 4a - a^2\lambda \\
\mathscr{L}_\lambda'(a, h, \lambda) &= 2000 - a^2h
\end{aligned}$$

Wir setzen diese partiellen Ableitungen gleich Null und erhalten folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der kritischen Stellen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_a'(a, h, \lambda) &= 2a + 4h - 2ah\lambda &&= 0 \quad \text{(I)} \\
\mathscr{L}_h'(a, h, \lambda) &= 4a - a^2\lambda &&= 0 \quad \text{(II)} \\
\mathscr{L}_\lambda'(a, h, \lambda) &= 2000 - a^2h &&= 0 \quad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Lösen wir nun (II) nach λ auf, so erhalten wir (wegen $a > 0$): $\lambda = \dfrac{4}{a}$

Dieses setzen wir nun in (I) ein. Dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
2a + 4h - 2ah\lambda &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
2a + 4h - 2ah\frac{4}{a} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
2a + 4h - 8h &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
2a - 4h &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
a &= 2\mathrm{h}
\end{aligned}
$$

Dieses setzen wir nun in (III) ein. Dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
2000 - a^2h &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
2000 &= a^2h \quad \Leftrightarrow \\
2000 &= (2h)^2h \quad \Leftrightarrow \\
2000 &= 4h^3 \quad \Leftrightarrow \\
500 &= h^3 \quad \Leftrightarrow \\
\sqrt[3]{500} &= h
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung von $a = 2h$ erhalten wir hieraus:

$$
\begin{aligned}
a &= 2\mathrm{h} \quad \Leftrightarrow \\
a &= 2\sqrt[3]{500} \quad \Leftrightarrow \\
a &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{500} \quad \Leftrightarrow \\
a &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 500} \quad \Leftrightarrow \\
a &= \sqrt[3]{8 \cdot 500} \quad \Leftrightarrow \\
a &= \sqrt[3]{4000}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten als kritische Stelle unserer Aufgabe:

$$(a, h) = (\sqrt[3]{4000}, \sqrt[3]{500})$$

Für die Oberfläche ergibt sich wieder der Wert $F(a, h) = 755,95$ $[cm^2]$.

Wir haben also die gleiche Lösung gefunden wie mit der Substitutionsmethode.

Berechnen wir nun noch den Wert für λ:

$$\lambda = \frac{4}{a} = \frac{4}{\sqrt[3]{4000}} \approx 0,25\ . \quad \text{Was sagt uns dieser Wert?}$$

9.9 Satz über marginale Veränderungen

Satz 9.3. *Gegeben sei die Aufgabe*

$$\begin{array}{rl} \textit{max(min)} & f(x, y) \\ \textit{u. d. N.} & g(x, y) = c \end{array}$$

(wie in der grundlegenden Aufgabe).

Wenn man in der Nebenbedingung den Wert der rechten Seite c um eine Einheit erhöht, so verändert sich der Zielfunktionswert um ungefähr λ Einheiten.

9.10 Auswirkung des Satzes über marginale Veränderungen

Wenden wir dies auf unser Quaderbeispiel an.

Wir verändern die Aufgabe so, dass wir folgendes Problem lösen wollen:

Bestimmen Sie die Abmessungen eines nach oben offenen
Quaders mit quadratischer Grundseite und einem Volumen
von 2001$[cm^3]$ mit minimaler Oberfläche.

Dann erhöht sich der Wert der Oberfläche von $755,95$ $[cm^2]$ um ungefähr $0,25$ $[cm^2]$ auf rund $756,2$ $[cm^2]$ Dabei sei angemerkt, dass sich in der Regel die Stelle des Optimums auch etwas verschiebt.

9.11 Analyse der Methode von LAGRANGE

. Betrachten wir die gestellte Aufgabe, so haben wir

i) die Komplexität des Problems durch das Einfügen der Variablen λ erhöht

ii) die kritischen Stellen gefunden [im obigen Beispiel: eine Stelle]

iii) die Auswirkung der marginalen Veränderung der Nebenbedingung bestimmt.

Anders als bei der Substitutionsmethode haben wir den Nachweis, dass die gefundenen Stellen optimal sind, <u>nicht</u> erbracht.

Es gibt Formeln, die diese „Lücke" schließen.

Diese sind jedoch so komplex, dass sie den Rahmen unserer Vorlesung sprengen würden. Wir verzichten darauf.